**Правительство Российской Федерации**

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математический анализ

Mathematical Analysis

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 25

Регистрационный номер рабочей программы: 002182

Санкт-Петербург

2022

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение методам математического анализа; развитие у обучающихся доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических и специальных дисциплин.

Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: изучение основных разделов математического анализа; развитие навыков самостоятельного решения практических задач.

**1.2. Требования к подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен иметь предварительную подготовку в объеме курса математического анализа, изучаемого в средней школе.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. | Владеет профессиональными знаниями и умениями применения математического анализа в различных прикладных областях науки и техники.  Умеет исследовать асимптотику и критические значения функций.  Владеет методами интегрирования функций одной и нескольких переменных. | ОПК-1.002182.1. Решает практические задачи по математическому анализу. |
| 2 | Профессиональные компетенции (академические) | ПКА-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий. | Владеет основными методами дифференциального и интегрального исчисления, числовых и функциональных рядов, теории функций комплексной переменной, теории меры. | ПКА-1.002182.1. Правильно использует терминологию математического анализа.  ПКА-1.002182.2. Демонстрирует знание основных определений, теорем и понятий математического анализа. |

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Практические занятия в активной и интерактивной форме в объёме 40 часов в первом семестре, 40 часов во втором семестре, 66 часов в третьем семестре и 34 часов в четвёртом семестре.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | | | | | | | | | | Объём активных и интерактивных форм учебных занятий | | | | | Трудоёмкость | |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | | сам. раб. с использованием  методических материалов | | текущий контроль (сам.раб.) | | промежуточная аттестация (сам.раб.) | | | | итоговая аттестация  (сам.раб.) | | | | |  | | | | |  | |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 62 | 0 | 2 | 58 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | | 77 | 0 | | | | | 43 | | | | 0 | | | | 40 | | | 7 | | |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 | 2-100 |  | 2-100 |  |  |  | | 1-1 |  | | | | | 1-1 | | | |  | | | |  | | |  | | |
| ИТОГО | 62 |  | 2 | 58 |  | 4 | 2 |  | 4 |  |  |  | | 77 |  | | | | | 43 | | | |  | | | | 40 | | | 7 | | |
| Семестр 2 | 60 | 0 | 2 | 54 | 0 | 4 | 0 |  | 4 | 0 | 0 | 0 | 55 | | 0 | | | | | | 37 | | | | 0 | | | | 40 | | | 6 | | |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 | |  | | | | | | 1-1 | | | |  | | | |  | | |  | | |
| ИТОГО | 122 |  | 4 | 112 |  | 8 | 2 |  | 8 |  |  |  | 132 | |  | | | | | | 80 | | | |  | | | | 80 | | | 14 | | |
| Семестр 3 | 62 | 0 | 2 | 58 | 0 | 4 | 2 |  | 4 | 0 | 0 | 0 | 56 | | | | 0 | | 28 | | | | 0 | | | 66 | | | | 6 | | |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 | 2-100 |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 | | | |  | | 1-1 | | | |  | | |  | | | |  | | |
| ИТОГО | 184 |  | 6 | 170 |  | 12 | 4 |  | 12 |  |  |  | 188 | | | |  | | 108 | | | |  | | | 146 | | | | 20 | | |
| Семестр 4 | 30 | 0 | 2 | 24 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 42 | | | | 0 | | 38 | | | | 0 | | | 34 | | | | 4 | | |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 | | | |  | | 1-1 | | | |  | | |  | | | |  | | |
| ИТОГО | 214 | 0 | 8 | 194 |  | 16 | 4 |  | 16 |  |  |  | 230 | | | |  | | 146 | | | |  | | | 180 | | | | 23 | | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Формы текущего контроля успеваемости, виды промежуточной и итоговой аттестации | | | |
| Период обучения (модуль) | Формы текущего контроля успеваемости | Виды промежуточной аттестации | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | |
| очная форма обучения | | | |
| Семестр 1 | Контрольные работы | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Семестр 2 | Контрольные работы | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Семестр 3 | Контрольные работы | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Семестр 4 | Контрольные работы | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): Семестр 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование темы (раздела, части)** | **Вид учебных занятий** | **Количество часов** |
| I. | Введение (множества, аксиомы вещественныx чисел, счетные и континуальные множества) | лекции | 4 |
| практические занятия | 2 |
| по методическим материалам | 10 |
| II. | Последовательности в метрических пространствах | лекции | 14 |
| практические занятия | 16 |
| по методическим материалам | 30 |
| III. | Предел и непрерывность отображений. | лекции | 20 |
| практические занятия | 18 |
| по методическим материалам | 30 |
| IV. | Дифференциальное исчисление функций одной переменной. | лекции | 20 |
| практические занятия | 18 |
| по методическим материалам | 30 |
| V. | Интегральное исчисление функций одной переменной (начало). | лекции | 4 |
| практические занятия | 4 |
| по методическим материалам | 13 |
| VI. | Промежуточная аттестация | Консультация | 2 |
| Промежуточная аттестация  (зачет, экзамен) | 4 |
| Промежуточная аттестация (сам.работа) | 43 |

Период обучения (модуль): Семестр 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Период обучения (модуль): Семестр 2 | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I. | Интегральное исчисление функций одной переменной (продолжение). | лекции | 24 |
| практические занятия | 24 |
| по методическим материалам | 20 |
| II. | Числовые и функциональные ряды. | лекции | 20 |
| практические занятия | 20 |
|  | 20 |
| III. | Ряды Фурье | лекции | 10 |
| практические занятия | 8 |
| по методическим материалам | 10 |
| IV. | Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (начало). | лекции | 6 |
| практические занятия | 6 |
| по методическим материалам | 5 |
| V. | Промежуточная аттестация | Консультация | 2 |
| Промежуточная аттестация  (зачет, экзамен) | 4 |
| Промежуточная аттестация (сам.работа) | 37 |

Период обучения (модуль): Семестр 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I. | Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (продолжение). | лекции | 30 |
| практические занятия | 30 |
| по методическим материалам | 27 |
| II. | Функции комплексного переменного. | лекции | 30 |
| практические занятия | 32 |
| по методическим материалам | 27 |
| III. | Теория меры (начало) | лекции | 4 |
| практические занятия | 0 |
| по методическим материалам | 2 |
| IV. | Промежуточная аттестация | Консультация | 2 |
| Промежуточная аттестация  (зачет, экзамен) | 4 |
| Промежуточная аттестация (сам.работа) | 28 |

Период обучения (модуль): Семестр 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I. | Теория меры (продолжение). | лекции | 14 |
| практические занятия | 12 |
| по методическим материалам | 38 |
| II. | Интегрирование на многообразиях | лекции | 10 |
| практические занятия | 12 |
| по методическим материалам | 30 |
| Ш | Интегралы с параметром. | лекции | 6 |
| практические занятия | 4 |
| по методическим материалам | 10 |
| IV | Промежуточная аттестация | Консультация | 2 |
| Промежуточная аттестация  (зачет, экзамен) | 4 |
| Промежуточная аттестация (сам.работа) | 38 |

Модуль 1. Введение.

Множества. Отображения. Аксиомы вещественных чисел. Индукция. Комплексные числа. Полярные координаты. Счетные множества.

Модуль 2. Последовательности в метрических пространствах.

Метрические, векторные, нормированные пространства. Скалярное произведение, неравенство Коши – Буняковского. Предел последовательности и его свойства. Точки и множества в метрических пространствах. Компактность, принцип выбора, полнота. Характеристика компактов в n-мерном пространстве. Грани числовых множеств. Предел монотонной последовательности. Число e. Бесконечно большие. Верхний и нижний пределы последовательности.

Модуль 3. Предел и непрерывность отображений.

Предел отображения и его свойства. Равносильность различных определений предела. Предел монотонной функции. Критерий Больцано – Коши. Двойной и повторные пределы. Непрерывные отображения и их свойства. Точки разрыва. Теоремы Больцано – Коши и Вейерштрасса. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Непрерывность монотонной и обратной функции. Степенная, показательная и логарифмическая функции. Замечательные пределы. О-символика, асимптотические соотношения.

Модуль 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Дифференцируемость и производная. Касательная. Правила дифференцирования. Основные теоремы дифференциального исчисления. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Исследование функций на монотонность и выпуклость с помощью производной, построение графиков, доказательство неравенств. Классические неравенства.

Модуль 5. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная и неопределенный интеграл. Интеграл Римана, интегрируемые функции. Основные приемы вычисления интегралов. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Формула Тейлора с интегральным остатком. Теоремы о среднем. Формула Валлиса. Интегральные неравенства. Несобственные интегралы: сходимость и абсолютная сходимость, признаки сравнения, Дирихле и Абеля. Приложения интеграла: вычисление площадей, объемов, длин. Длина пути. Функции ограниченной вариации.

Модуль 6. Числовые и функциональные ряды.

Сходимость и простейшие свойства. Признаки сравнения Коши, Даламбера, интегральный признак. Абсолютная сходимость. Признаки Дирихле, Абеля, Лейбница. Перестановка членов ряда. Умножение рядов. Двойные и повторные ряды. Равномерная сходимость. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля. Перестановки операций и равномерная сходимость. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Операции со степенными рядами. Ряд Тейлора. Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента. Разложения элементарных функций. Формула Стирлинга.

Модуль 7. Ряды Фурье.

Пространства периодических функций. Ортогональные системы. Ортогональные ряды и ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема Римана – Лебега. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса - Фишера. Ядро Дирихле. Принцип локализации Римана. Суммирование рядов методами средних арифметических и Абеля – Пуассона. Ядра Фейера и Пуассона. Свертка.Аппроксимативная единица. Теорема Фейера. Теоремы Вейерштрасса о приближении многочленами. Равенство Парсеваля.

Модуль 8. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Линейные операторы в евклидовых пространствах. Норма оператора. Дифференцируемые отображения, правила дифференцирования. Формула Лагранжа. Дифференцируемость и частные производные. Градиент, матрица Якоби. Производные высших порядков. Независимость от очередности дифференцирования. Многомерная формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Теоремы об обратном и неявном отображении. Замена переменных в дифференциальных выражениях. Условные экстремумы, метод Лагранжа.

Модуль 9. Функции комплексной переменной.

Голоморфные функции. Условия Коши – Римана. Интегральная теорема и формула Коши. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши, теорема Лиувилля, основная теорема высшей алгебры. Голоморфные и гармонические функции. Теорема единственности. Принцип максимума модуля. Аналитическое продолжение. Логарифм и степенная функция комплексного аргумента. Ряды Лорана. Классификация особых точек. Вычеты. Теорема Коши о вычетах и ее применение. Сфера Римана. Понятие о конформном отображении. Дробно-линейные функции. Отображения, совершаемые элементарными функциями. Принцип аргумента, теорема Руше.

Модуль 10. Мера и интеграл.

Полукольца и сигма-алгебры. Порожденные сигма-алгебры, борелевская сигма-алгебра. Мера и ее свойства. Внешняя мера. Стандартное продолжение меры. Объем ячейки. Мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества. Регулярность меры Лебега. Измеримость образа при гладком отображении. Мера Лебега при линейном отображении и движении. Свойства измеримых функций. Приближение измеримых функций простыми. Сходимость по мере и почти везде. Определение и свойства интеграла по мере. Теоремы Леви, Фату и Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Сечения измеримого множества. Теоремы Тонелли и Фубини. Общая схема замены переменной в интеграле. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в кратном интеграле. Вычисление кратных интегралов.

Модуль 11. Интегрирование на многообразиях.

Гладкие многообразия. Край, ориентация. Регулярность перехода. Интегралы первого и второго рода. Теорема Стокса и ее частные случаи.

Модуль 12. Интегралы с параметром.

Интегралы с параметрами и операции над ними. Гамма-функция и ее свойства. Разложение синуса в бесконечное произведение. Преобразование Фурье и его свойства. Равносходимость ряда и интеграла Фурье.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Методические материалы включают в себя следующие типы материалов — учебники, учебные пособия, методические указания для обучающихся, Интернет-ресурсы, электронные учебные пособия, с опорой на которые проводится аудиторная работа.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

При самостоятельном изучении теоретического материала и выполнении практических заданий целесообразно использовать рекомендованную основную и дополнительную литературу.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Для текущего контроля успеваемости используются индивидуальные, самостоятельные и контрольные работы.

Контрольные работы пишутся в течении двух или четырёх академических часов (в зависимости от типа контрольной работы).

Контрольная может зачитываться как позадачно, так и целиком (на усмотрение преподавателя). В случае, если задача (или работа) не зачтена, обучающемуся высказываются замечания и, после предоставления работы над ошибками и(или) (на усмотрение преподавателя) штрафных заданий, предоставляется возможность переписывания.

Примеры задач для контрольных работ.

Приведены номера по изданиям из списка обязательной литературы [1,2].

Семестр 1.

[1] № 10, 145, 358,494, 514, 939, 965, 1521, 1585.

Семестр 2.

[1] № 1827, 2008, 2136, 2205, 2286, 2424, 2629, 2913, 2952.

Семестр 3.

[1] № 3274, 3514, 3662,

[2] № 1.69(1), 8.31, 11.09(1), 20.16(5), 22.04(5), 23.09(8), 35.14

Семестр 4.

[1] 3945, 4025, 4357, 4372, 4389, 3800, 3821, 3897.

Зачет ставится в случае, если зачтено не менее 70% заданий.

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 45 минут.

При подготовке к экзамену обучающийся может использовать свой личный конспект. Использование учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с экзамена.

После ответа на вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена. В качестве дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода, в том числе основные определения, примеры и логические связи, введенные в дисциплине.

**Критерии выставления оценок на экзамене (традиционно и в системе ECTS):**

Оценка «отлично» **(А)** выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;

2. обучающийся отвечает на все дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся в целом дан ответ по всем вопросам билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя), либо дан полный исчерпывающий ответ на один из вопросов билета, по второму вопросу представлены основные определения и формулировки;

2. обучающийся отвечает более чем на 70% дополнительных вопросов.

Оценка **«B»** ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено не более двух неточностей.

Оценка **«C»** ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено более двух неточностей.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются оба условия:

1. по обоим вопросам даны все основные определения и формулировки, а по одному из вопросов приведены основные шаги рассуждений;

2. обучающийся дает правильный ответ более чем на 50% заданных дополнительных вопросов.

Оценка **«D»** ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено не более одной грубой ошибки.

Оценка **«E»** ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено более одной грубой ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» (**«F»**) выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**Критерии оценки на зачете в системе ECTS**

Оценка «A» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 90% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «B» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 80% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «C» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 70% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «D» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 60% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «E» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при не более чем за две попытки сделано менее 60% заданий.

Оценка «F» ставится в тех же случаях, что и оценка «не зачтено»

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

**Компетенции, впервые формируемые дисциплиной:**

ОПК-1 — способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ПКА-1 — способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.

**Компетенции, развиваемые дисциплиной:**

Нет.

**Компетенции, полностью сформированные по результатам освоения дисциплины:**

Нет.

Для каждой компетенции применяется линейная шкала оценивания, определяемая долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию

Пример списка вопросов для устного экзамена.

1 семестр

1. Множества и операции над ними.

2. Аксиомы вещественных чисел.

3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

4. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.

5. Счетность множества рациональных чисел.

6. Несчетность отрезка.

7. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.

8. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.

9. Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.

10. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши - Буняковского.

11. Бесконечно большие и бесконечно малые.

12. Свойства открытых множеств. Открытость шара.

13. Предельные точки. Связь открытости и замкнутости. Свойства замкнутых множеств.

14. Компактность, замкнутость и ограниченность.

15. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.

16. Характеристика компактов в $\Bbb R^m$. Принцип выбора.

17. Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\Bbb R^m$.

18. Теорема о стягивающихся отрезках.

19. Предел монотонной последовательности.

20. Неравенство Я.Бернулли, $\lim z^n$, число $e$.

21. Верхний и нижний пределы последовательности.

22. Предел функции. Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне.

23. Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).

24. Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.

25. Предел монотонной функции.

26. Критерий Больцано - Коши для отображений.

27. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции. Непрерывность композиции.

28. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.

29. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.

30. Теорема Кантора.

31. Теорема Больцано - Коши о непрерывных функциях.

32. Непрерывный образ промежутка (с леммой). Теорема Больцано - Коши о непрерывных отображениях.

24. Разрывы и непрерывность монотонной функции.

25. Существование и непрерывность обратной функции.

26. Степень с произвольным показателем.

27. Свойства показательной функции и логарифма.

28. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

29. Замечательные пределы.

30. Замена на эквивалентную при раскрытии неопределенностей. Асимптоты.

31. Единственность асимптотического разложения.

32. Дифференцируемость и производная.

33. Арифметические действия и производная.

34. Производная композиции.

35. Производная обратной функции и функции, заданной параметрически.

36. Теорема Ферма.

37. Теорема Дарбу, следствия.

38. Теорема Ролля.

39. Формулы Лагранжа и Коши.

40. Правило Лейбница дифференцирования произведения.

41. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

42. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

43. Тейлоровские разложения функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

44. Иррациональность числа $e$.

45. Правила Лопиталя, примеры.

46. Критерий монотонности функции.

47. Доказательство неравенств с помощью производной, примеры.

48. Необходимое условие экстремума. Исследование критических точек.

49. Лемма о трех хордах и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции.

50. Критерии выпуклости функции.

51. Выпуклость и касательные. Опорная прямая.

52. Неравенство Иенсена.

53. Неравенство Гёльдера.

54. Неравенство Минковского.

55. Простейшие свойства средних.

56. Неравенства между средними.

57. Простейшие свойства первообразной и неопределенного интеграла.

58. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2 семестр

1. Свойства сумм Дарбу.

2. Критерий интегрируемости функции.

3. Интегрируемость непрерывной и монотонной функций.

4. Интегрируемость на отрезке и его части.

5. Арифметические действия над интегрируемыми функциями.

6. Простейшие свойства определенного интеграла.

7. Первая теорема о среднем интегрального исчисления.

8. Интеграл с переменным верхним пределом.

9. Формула Ньютона - Лейбница.

10. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

11. Теорема Бонне.

12. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

13. Формула Валлиса.

14. Интегральные неравенства.

15. Простейшие свойства несобственных интегралов (критерий Больцано - Коши, поведение остатка, линейность, монотонность, замена переменной, интегрирование по частям).

16. Несобственные интегралы от неотрицательных функций (ограниченность первообразной, признак сравнения, пример).

17. Несобственные интегралы от функций произвольного знака (сходимость и абсолютная сходимость, признаки Абеля и Дирихле, пример).

18. Вычисление площадей.

19. Вычисление объемов.

20. Аддитивность длины пути.

21. Длина гладкого пути.

22. Частные случаи формулы для длины пути. Пример.

23. Простейшие свойства числовых рядов (поведение остатка, линейность, необходимое условие сходимости, критерий Больцано - Коши, расстановка скобок). Примеры.

24 Частные суммы положительного ряда. Признак сравнения сходимости положительных рядов.

25. Гармонический ряд. Постоянная Эйлера.

26. Радикальный признак Коши сходимости положительных рядов и абсолютной сходимости рядов.

27. Признак Даламбера сходимости положительных рядов и абсолютной сходимости рядов.

28. Интегральный признак Коши сходимости рядов. Примеры оценок частичных сумм и остатков рядов.

29. Сходимость и абсолютная сходимость рядов. Признак Лейбница.

30. Перестановка членов ряда. Пример перестановки, изменяющей сумму.

31. Умножение рядов. Пример.

32. Критерий Больцано - Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (с примерами).

33. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница равномерной сходимости рядов (с примерами).

34. Почленный переход к пределу.

35. Равномерная сходимость и непрерывность (с примерами). Полнота пространства непрерывных на компакте функций.

36. Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла (с примерами).

37. Предельный переход под знаком производной (с примерами).

38. Радиус сходимости степенного ряда: формула Коши - Адамара, примеры.

39. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование степенных рядов.

40. Дифференцирование степенных рядов.

41. Единственность степенного ряда. Примеры различного поведения рядов Тейлора.

Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.

42. Ортогональные ряды. Формулировка теоремы об ортогонализации. Примеры ортогональных систем.

43. Ряды Фурье. Свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.

44. Теорема Рисса - Фишера.

45. Тригонометрические ряды Фурье. Ядро Дирихле. Обзор теорем о поведении рядов Фурье.

45. Теорема Римана - Лебега. Оценки коэффициентов Фурье.

46. Принцип локализации Римана.

47. Ядро Фейера.

48. Свойства свертки.

49. Теорема об аппроксимативной единице.

59. Теорема Фейера и ее следствия. Теорема Вейерштрасса.

60. Среднеквадратическое приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.

61. Равенство Парсеваля.

3 семестр

1. Вычисление нормы линейного оператора.

2. Оценка нормы линейного оператора в евклидовых пространствах. Примеры.

3. Дифференцируемые отображения. Дифференцирование линейного отображения, арифметических действий, композиции.

4. Дифференцирование скалярного произведения. Формула Лагранжа для вектор-функций и отображений. Пример.

5. Частные производные дифференцируемой функции, примеры.

6. Градиент и матрица Якоби, правило цепочки.

7. Дифференцируемость функции с непрерывными частными производными.

8. Независимость частных производных второго порядка от очередности дифференцирования.

9. Независимость частных производных высших порядков от очередности дифференцирования.

10. Многомерная формула Тейлора.

11. Различная запись и частные случаи многомерной формулы Тейлора (полиномиальная формула, дифференциалы высших порядков, случай двух переменных).

12. Экстремумы функций нескольких переменных.

13. Обратимость оператора, близкого к обратимому.

14. Теорема об обратном отображении (часть 1: существование обратного отображения). Обратимость и локальная обратимость.

15. Теорема об обратном отображении (часть 2: открытость образа). Следствие об открытом отображении.

16. Теорема об обратном отображении (часть 3: дифференцирование обратного отображения).

17. Теорема о неявно заданном отображении.

18. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

19. Расстояние от точки до гиперплоскости.

20. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на единичной сфере. Выражение нормы линейного оператора через собственное число.

21. Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента.

22. Разложения логарифма и арктангенса в степенной ряд. Вычисление логарифмов. Ряд Лейбница.

23. Формула Стирлинга.

24. Биномиальный ряд Ньютона, частные случаи. Разложение арксинуса.

25. Простейшие свойства криволинейных интегралов.

26. Теорема Даламбера – Эйлера – Коши - Римана (с примерами).

27. Голоморфные функции с постоянной вещественной частью, мнимой частью, модулем.

28. Лемма Гурса.

29. Интегральная теорема Коши.

30. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

31. Аналитичность голоморфной функции.

32. Теорема Мореры. Свойства, равносильные голоморфности.

33. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

34. Основная теорема высшей алгебры (два доказательства).

35. Голоморфные и гармонические функции.

36. Изолированность нулей голоморфной функции (с леммой). Кратность нулей.

37. Теорема единственности для голоморфных функций (с примерами).

38. Принцип максимума модуля.

39. Свойства рядов Лорана.

40. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.

41. Устранимые особые точки.

42. Полюса.

43. Существенно особые точки, теорема Пикара (без доказательства).

44. Теорема Коши о вычетах.

45. Правила вычисления вычетов. $\int\_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$.

46. Лемма Жордана. Интегралы Лапласа. $\int\_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

47. Сфера Римана.

48. Вычет в бесконечности. Теорема о сумме вычетов.

49. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформный изоморфизм областей.

50. Дробно-линейные функции.

51. Формула для числа нулей и полюсов мероморфной функции. Принцип аргумента.

52. Теорема Руше.

4 семестр

1. Полукольца и $\sigma$-алгебры. Полукольцо ячеек. Борелевские множества.

2. Простейшие свойства меры.

3. Внешняя мера.

4. Стандартное распространение меры (часть 1: $\sigma$-алгебра и счетная аддитивность).

5. Свойства стандартного распространения меры. Единственность стандартного распространения (без доказательства, с примером).

6. Представление открытого множества в виде объединения ячеек.

7. Регулярность меры Лебега. Следствия.

8. Измеримость образа при гладком отображении.

9. Мера Лебега при линейном отображении. Мера Лебега при движении.

10. Простейшие свойства измеримых функций.

11. Приближение измеримых функций простыми и ступенчатыми.

12. Действия над измеримыми функциями.

13. Сходимость по мере и почти везде: определения, примеры. Формулировки теорем Лебега, Ф.Рисса, Лузина.

14. Монотонность интеграла. Однородность интеграла.

15. Счетная аддитивность интеграла по множеству.

16. Суммируемость и абсолютная суммируемость (со следствиями).

17. Теорема Леви (с вариантом для рядов).

18. Аддитивность интеграла по функции.

19. Теорема Фату.

20. Теорема Лебега о мажорированной сходимости (со следствием и примером).

21. Абсолютная непрерывность интеграла. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры. Нулевой интеграл от неотрицательной функции.

22. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

23. Сечения измеримого множества.

24. Теоремы Фубини и Тоннелли.

25. Мера $n$-мерного шара и конуса.

26. Общая схема замены переменной в интеграле.

27. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме.

28. Замена переменной в кратном интеграле.

29. Полярные, сферические и цилиндрические координаты. Вычисление интеграла $\int\_{0}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ с помощью полярных координат.

30. Предельный переход по параметру под знаком интеграла Лебега.

31. Непрерывность интеграла Лебега по параметру.

32. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру.

33. Вычисление интегралов $\int\_{0}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ и $\int\_0^{\infty}\frac{\sin x}x\,dx$ с помощью параметра.

34. Интегралы Френеля.

35. Простейшие свойства $\Gamma$-функции (формула приведения, значения, дифференцирование, график).

36. Связь между $\Gamma$ и $B$-функциями. Формула дополнения. Формула удвоения.

37. Гладкие многообразия в $\Bbb R^n$: основные понятия, способы задания, примеры.

38. Край гладкого многообразия. Ориентация многообразия и его края, частные случаи.

39. Мера $k$-мерного параллелепипеда в $\Bbb R^n$. Определитель Грама.

40. Измеримые множества на многообразии.

41. Мера на многообразии.

42. Интегралы первого и второго рода, частные случаи.

43. Связь между кратным интегралом и интегралом по сфере, следствия.

44. Теорема Стокса для гладких многообразий.

45. Интегральные формулы - частные случаи теоремы Стокса.

46. Пространства $L\_p(E,\mu)$, их вложение.

47. Свойства преобразования Фурье.

48. Равносходимость ряда и интеграла Фурье. Интегралы Лапласа.

*Проверяемые компетенции: ОПК-1, ПКА-1*

*Сформированность компетенций считается пропорционально доле успешных ответов на вопросы и выполненности заданий.*

***3.1.4.3. Соответствие индикаторов достижения компетенций и контрольно-измерительных материалов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 1 | ОПК-1.002182.1. Решает практические задачи по математическому анализу. | Примеры списков вопросов для устного экзамена. |
| 2 | ПКА-1.002182.1. Правильно использует терминологию математического анализа. | Примеры списков вопросов для устного экзамена. |
| 3 | ПКА-1.002182.2. Демонстрирует знание основных определений, теорем и понятий математического анализа. | Примеры списков вопросов для устного экзамена. |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К проведению лекционных занятий должны привлекаться преподаватели, имеющие диплом о высшем образовании по соответствующему направлению.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ.

MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел, по 2 шт.на каждый час семинарских, лекционных занятий и консультации, цветные мелки (4 цвета, 8 мелков на семестр).

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, АСТ, Москва, 2005

2. Евграфов М.А. и др., Наука, Москва, 1969.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х т.). ФМЛ, 2001-2003.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 3-х т.). М., 1988.

5. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973.

6. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. БХВ-Петербург, СПб, 2011

7. Лебедев Н.А. Интегрирование на многообразиях. Л., 1982.

8. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.

9. Виноградов О.Л. Математический анализ. Изд-во BHV, СПб, 2017.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу (в 3-х т.).

2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (в 2-х т.).

3. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. СПб., 2004.

4. Зорич В.А. Математический анализ (в 2-х т.). М., 1984.

5. Хавин В.П. Основы математического анализа. Л., 1989.

6. Рудин У. Основы математического анализа. М., 1976.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

* Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/>
* Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ:

<http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS>

* Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ:

<http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/>

* Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource_type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Кононова Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа, a.kononova@spbu.ru.